Contenido

PRIMITIVAS DE UNA FUNCIÓN.

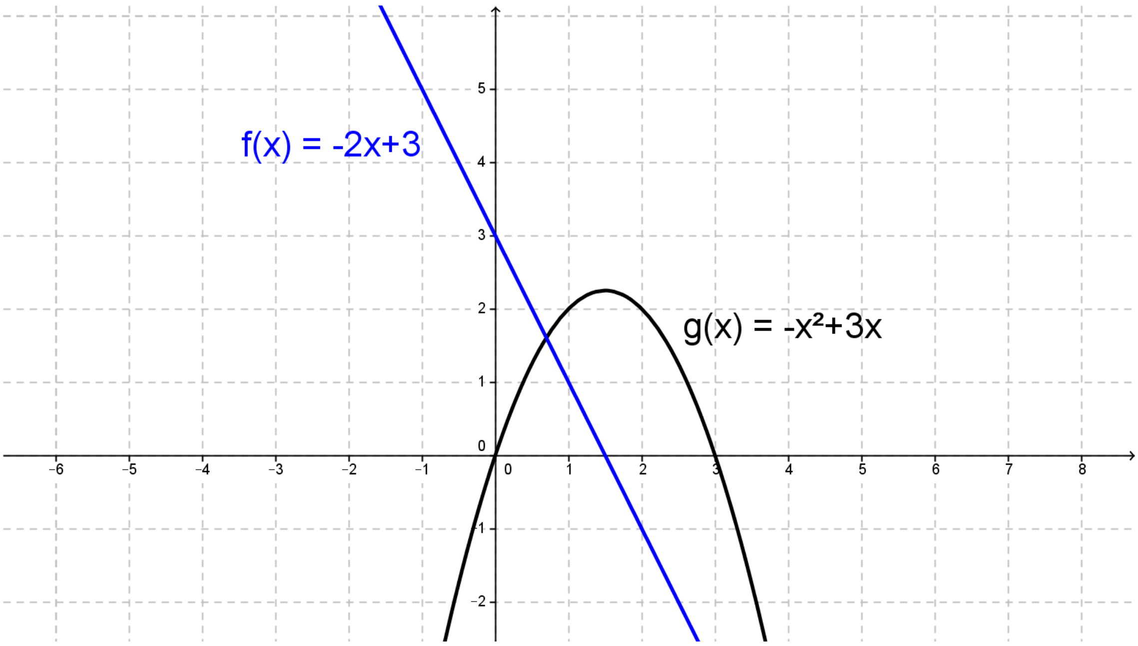
Una posible secuencia para trabajar en Secundaria.

Introducción

1. El número de bacterias de una posible colonia, en un cultivo, varía cuando se le agrega hipoclorito de sodio (NaClO). Si llamamos x a la cantidad de mililitros de NaClO agregados y $F(x)$ al número de bacterias, determinamos una función F. A partir de la experimentación podemos decir que la velocidad de variación de F es: $F'(x) = -2x + 3$ con $0 \leq x \leq 3$.
   1.1. Halla $F(x)$ si se sabe que el número inicial de bacterias es 4.10^3.
   1.2. Si el número inicial fuese 10^5, ¿cuál sería $F(x)$?
   1.3. Grafica en un mismo sistema de coordenadas F' y las funciones F obtenidas en 1.1.y 1.2.
   1.4. Interpreta cada gráfica en el contexto del problema.
   1.5. Haz una lectura del vínculo entre F' y F en ese contexto. Para ello puedes trazar algunas rectas tangentes a la gráfica de la función F
   Nota: En el siguiente link encontrarás un video tutorial que explica una manera de trazar una recta trazar una recta conociendo uno de sus puntos y la pendiente.

2. En la siguiente figura, la función g es a la función f como la función F es a la función F' en el problema anterior.
   2.1. Bosqueja en la misma figura al menos tres casos más, diferentes a las obtenidas en el problema anterior.

figura1.Funciones f y g.



3. Agrega filas en la tabla siguiente con las expresiones algebraicas de los bosquejos de la parte dos.

Tabla 1. Funciones f y g (siendo g(x)=F(x))

f(x)	**F(x)**
-2x+3	$-x^2+3x+4000$
-2x+3	$-x^2+3x+100000$

Definición

Sea f una función definida en un intervalo I (abierto o cerrado).Una función F es una primitiva de f en I, si y sólo si, $F'(x) = f(x) \forall x \in I$

Notas:

- Una función tiene una sola derivada, pero, si tiene una primitiva F tiene infinitas y son de la forma $F(x) + K, K \in R$
- Usaremos la notación de Leibniz para la familia de todas las primitivas de f en I: $\int f(x)dx$
- Leeremos: "primitivas de f"
- De lo anterior se desprende: $\int f(x)dx = F(x) + K, K \in R$
- Derivando: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + K\right)', \; K \in R$, se obtiene $f(x) = F'(x)$
- No todas las funciones tienen primitiva. Por ahora, admitiremos que la continuidad de f asegura la existencia de primitiva.

Teorema 1.

Toda primitiva F de una función f en I es una función continua en I.

Teorema 2.

Si F y G son dos primitivas de f en I difieren en una constante.

Propiedades.

1. La primitiva de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus primitivas. En símbolos: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. La primitiva del producto de una función por una constante es el producto de ésta por la primitiva de la función. En símbolos: $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \alpha \in R$

Métodos generales de búsqueda de primitivas de una función.

1. Integración inmediata. Ver enlace: Tabla de primitivas
2. Integración por partes.
3. Integración por sustitución o cambio de variable.
4. Integración por descomposición en elementos simples.

Ejercicios para practicar.

1. Obtén la familia de primitivas de $f : f(x) = 2$. Representa gráficamente algunas de ellas.

2. Dada la función f tal que $f(x) = e^x + 3x^2 + 1$. Halla la primitiva de f en R para la cual $F(1) = e + 4$.

3. Verifica que $F(x) = x^2\left(x + 5\right)$ es una primitiva de $f(x) = 3x^2 + 10x$. Encuentra otra primitiva de f.

4. Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

5. Halla las siguientes primitivas:

5.1. $\int x^5 dx$

5.2. $\int x dx$

5.3. $\int \left(2x^2 - x + 3\right) dx$

5.4. $\int (3x+4)^2\, dx$

5.5. $\int \frac{dx}{x^2}$

5.6. $\int \sqrt[3]{x}dx$

5.7. $\int (1-x)\sqrt{x}dx$

6. Se lanza una bola hacia arriba con una velocidad inicial de $64 pies/s$ desde una altura inicial de 80 pies.
   6.1. Escribe la función posición que expresa la altura s en función del tiempo t.
   6.2. ¿Cuándo llega la bola al suelo?
7. Gravedad lunar. En la Luna, la aceleración de la gravedad es $-1,6 pies/s^2$ Se deja caer una piedra desde cierta altura y tarda 20 segundos en llegar al suelo de la Luna. ¿Desde qué altura ha caído? ¿Con qué velocidad ha impactado en el suelo?

8. Halla las primitivas:
   8.1. $\int \frac{dx}{x}$
   8.2. $\int \frac{dx}{2x-3}$
   8.3. $\int \frac{x}{x^2-1}dx$

$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\int e^{-x}dx$

9. Idem.
   9.1. $\int sen x dx$
   9.2. $\int sen\left(\frac{x}{2}\right)dx$
   9.3. $\int tg(2x)dx$
   9.4. $\int sen^2 x \cos x dx$
   9.5. $\int\left(\cos x - e^x + 5\right)dx$

10. Idem.
    10.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
    10.2. $\int \frac{dx}{9+x^2}$
    10.3. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.

Integración por partes

Sean f y g funciones reales con derivadas continuas en I, entonces,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

11. Halla:
    11.1 $\int \sqrt{x} Lx dx$
    11.2 $\int\left(x^2-1\right)e^x dx$
    11.3 $\int x\cos(3x)dx$

Integración por sustitución.

- $F(x) = \int f(x)dx$ con $f : I \to R$ continua en I.
- $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$ con $g : J \to R$, $g(J) \subset I$, g' continua en J

¿Se pueden vincular $F(x)$ y $H(x)$?

Verás que: $H(x) = F(g(x)) + K,\ K \in R$

Con g invertible: $F(x) = H(g^{-1}(x)) + K, K \in R$.

12. Halla

12.1. $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$

12.2. $\int \sqrt{2x+1}dx$

$\int \frac{Lx}{x}dx$

Integración por descomposición en fracciones simples.

Ver enlace: [Integración por descomposición en fracciones simples]

13. Idem

$\int \frac{4x^2+2x-4}{x^2-x-6}dx$

$\int \frac{x^3+x+2}{x^2+5x+6}dx$

14. Realiza las demostraciones que correspondan a lo expuesto en esta secuencia.

Bibliografía

- Apostol,T.(1967). Calculus. Barcelona. Reverté.
- Balparda,O. y otros.(1996). Matemática sexto. Montevideo. De La Plaza.
- Lages Lima,E. (1995). Curso de Análise.Río de Janeiro. Nova Letra. en pdf Análisis. Elon Lages Lima
- Larson, R y otros. (1999) Cálculo con geometría analítica. México.Mc Graw Hill. disponible en pdf Cálculo. Larson
- Linés,E (1991). Principios de Análisis Matemático. Barcelona. Reverté.
- Piskunov,N.(1983). Cálculo diferencial e integral. Moscú. Mir.
- Rey Pastor,J. y otros. (1952). Análisis Matemático. Bs.As. Kapelusz.
- Stewart, J. (1999). Cálculo. Conceptos y contextos. México. Thomson. disponible en formato pdf. Cálculo. Stewart